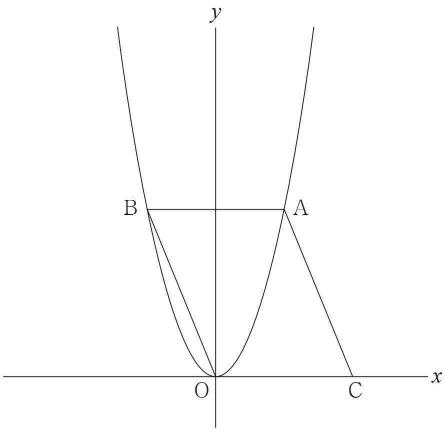
第15講　関数と図形①

Step 1

1　右の図のように，関数 $y = ax^2$ のグラフ上を $x > 0$ の範囲で動く点Aがあります。点Aを通り x 軸に平行な直線をひき，関数 $y = ax^2$ のグラフとの交点をBとします。また，点Aを通り直線BOに平行な直線をひき，x 軸との交点をCとします。ただし，$a > 0$ とします。

これについて，次の(1)～(3)に答えなさい。



(1)　点Aの y 座標が4，△AOCの面積が14となるとき，点Cの x 座標を求めなさい。

(2)　線分BCの中点の座標が(3，4)となるとき，a の値を求めなさい。

(3)　直線OAの傾きが4となるとき，直線BCの傾きを求めなさい。

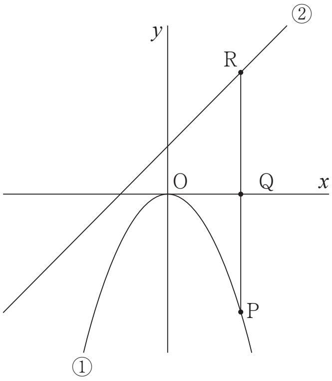
【広島県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

2　右の図で，点 O は原点であり，放物線①は関数 $y = -x^2$ のグラフで，直線②は関数 $y = x + 1$ のグラフである。

点 P は放物線①上の点であり，その x 座標は正の数である。また，点 P を通り，y 軸に平行な直線をひき，x 軸，直線②との交点をそれぞれ Q，R とする。

これについて，次のア，イの問いに答えよ。



ア　関数 $y = -x^2$ で，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 1$ のとき，y の変域を求めよ。

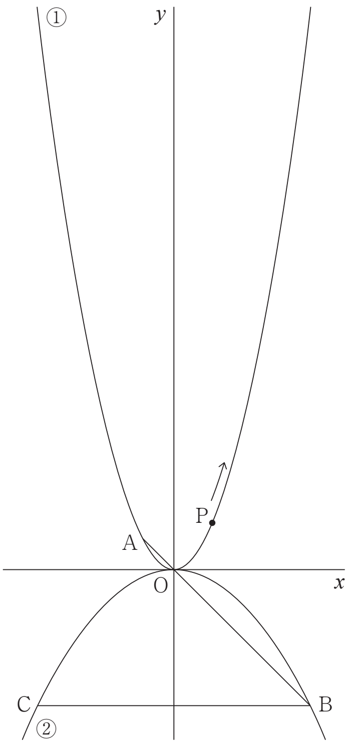
イ　線分 PQ の長さと，線分 QR の長さが等しくなるとき，点 P の x 座標はいくらか。点 P の x 座標を a として，a の値を求めよ。a の値を求める過程も，式と計算を含めて書け。

【香川県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step　2

3　右の図において，①は関数 $y = x^2$，②は関数 $y = ax^2$ のグラフであり，点 A は①のグラフ上に，点 B，C は②のグラフ上にある。3 点 A，O，B は 1 つの直線上にあり，直線 BC は x 軸に平行な直線である。また，2 点 A，B の x 座標はそれぞれ－1，4 である。さらに，①のグラフ上を動く点 P を考える。



このとき，次の 1～3 に答えなさい。

1　a の値を求めなさい。

2　①のグラフ上に x 座標が 3 である点 D をとる。点 P が①のグラフ上を点 A から点 D まで動くとき，点 P の y 座標の最小値と最大値を求めなさい。

3　点 P の x 座標を t とし，点 P から x 軸にひいた垂線と直線 AB，直線 BC との交点をそれぞれ Q，R とする。ただし，$0 < t < 4$ である。

このとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

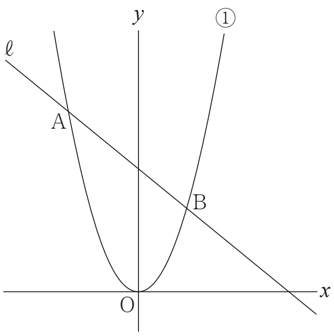
(1)　△QAP と△QBR において，QA：QB ＝ QP：QR が成り立つとする。
このとき，AP：BR を最も簡単な整数の比で表しなさい。

(2)　PQ：QR ＝ 3：1 となる t の値を求めなさい。

【山梨県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

4　右の図は，関数 $y = ax^2$……①のグラフと，このグラフ上の2点A，Bを通る直線 ℓ を示したものであり，点Aの座標は（－4，16），点Bの x 座標は3で，点Oは原点である。このとき，次の1～3の問いに答えなさい。なお，座標の1目もりは1cmとする。



1　a の値を求めよ。

2　直線 ℓ の傾きを求めよ。

3　点Pが関数①のグラフ上を点Aから点Bまで動く。点Pを通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点をQとする。また，点P，点Qから x 軸にひいた垂線と x 軸との交点をそれぞれR，Sとする。線分PQと線分PRの長さの和が14cmになるとき，次の(1)，(2)の問いに答えよ。

(1)　点Pの座標を求めよ。

(2)　点Pを通る右上がりの直線を m とする。線分QSを延長した直線と直線 m との交点をTとする。台形PRSTの面積が 65cm^2 であるとき，直線 m の式を求めよ。

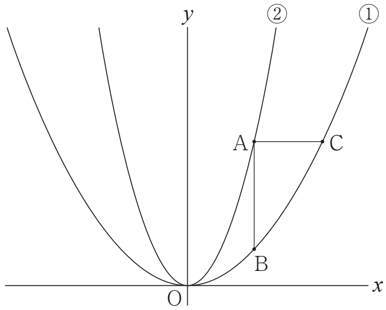
【鹿児島県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step　3

5　右の図において，放物線①，②はそれぞれ関数 $y=\frac{1}{4}x^2$，$y=x^2$ のグラフである。また，点Aは②上の $x>0$ の範囲を動く点である。点Aを通り y 軸に平行な直線と①との交点をBとし，点Aを通り x 軸に平行な直線と①との交点をCとする。

このとき，次の問いに答えなさい。



1　点Aの x 座標が2のとき，

(1)　点Bの y 座標を求めよ。

(2)　2点B，Cを通る直線の傾きを求めよ。

2　線分AB，ACを2辺とする長方形ABDCをつくる。点Aの x 座標を t とするとき，

(1)　点Dの x 座標，y 座標をそれぞれ t を使って表せ。

(2)　長方形ABDCが正方形となるような t の値を求めよ。

(3)　点(3，2)が長方形ABDCの周上にあるのは，$t=$ [ア] のときと，$t=$ [イ] のときである。ア，イに当てはまる数を，それぞれ書け。

【愛媛県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

〈 ***Note*** 〉

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

第15講　関数と図形①

Step 1

1　(1) 7　(2) $\frac{2}{9}$　(3) $-\frac{4}{3}$

≪解説≫

(1) 点Cのx座標をcとすると，$\triangle AOC = \frac{1}{2} \times c \times 4 = 2c = 14$より，$c = 7$

(2) 四角形ABOCは平行四辺形だから，線分BCの中点(3，4)をMとすると，点MはOAの中点になる。よって，OA＝2OMより，A(6，8)　点Aは，$y = ax^2$上にあるから，$x = 6$，$y = 8$を代入して，$8 = a \times 6^2$より，$a = \frac{2}{9}$

(3) 点Aのx座標をtとすると，直線OAの傾きが4のとき，A(t，$4t$)と表せる。また，点Bはy軸について点Aと対称だから，B($-t$，$4t$)　さらに，$OC = AB = t-(-t) = 2t$より，C($2t$，0)となる。よって，直線BCの傾きは，$\frac{0-4t}{2t-(-t)} = -\frac{4}{3}$

2　ア．$-4 \leqq y \leqq 0$　イ．(aの値) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

≪解説≫

ア．$x = 0$のとき，$y = 0$で最大値，$x = -2$のとき，$y = -(-2)^2 = -4$で最小値なので，yの変域は，$-4 \leqq y \leqq 0$

イ．3点P，Q，Rのx座標はaより，それぞれy座標を求めると，P(a，$-a^2$)，Q(a，0)，R(a，$a+1$)と表すことができる。よって，$PQ = a^2$，$QR = a+1$となるから，条件より，$a^2 = a+1$が成り立つ。整理して，$a^2 - a - 1 = 0$　解の公式より，$a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$　$a > 0$より，$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Step 2

3　1．(a＝) $-\frac{1}{4}$　2．(最小値) 0　(最大値) 9　3．(1) 2：3　(2) (t＝) 2

≪解説≫

1．A(-1，1)，B(4，$16a$)となるから，OAの傾きは-1，OBの傾きは，$\frac{16a}{4} = 4a$　3点A，O，Bは一直線上にあり，OAとOBの傾きは等しくなるから，$-1 = 4a$　よって，$a = -\frac{1}{4}$

2．xの変域は$-1 \leqq x \leqq 3$となり，最小値は$x = 0$のときで，$y = 0$，最大値は$x = 3$の

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ときで，$y = 3^2 = 9$

3. ⑴ △QAPと△QBRについて，対頂角より，∠AQP = ∠BQRなので，QA：QB = QP：QRが成り立つとき，2組の辺の比とその間の角が等しいから，△QAP ∽△QBR これより，∠APQ = ∠BRQ = 90°だから，APはx軸に平行で，P (1，1)となる。よって，AP = 1 −(− 1) = 2，BR = 4 − 1 = 3より，AP：BR = 2：3　⑵ P (t，t^2)，Q (t，$-t$)，R (t，-4)より，$PQ = t^2 - (-t) = t^2 + t$，$QR = -t - (-4) = -t + 4$ PQ：QR = 3：1より，$(t^2 + t):(-t + 4) = 3:1$が成り立つので，$t^2 + t = 3(-t + 4)$ 整理して，$t^2 + 4t - 12 = 0$　左辺を因数分解して，$(t + 6)(t - 2) = 0$より，$t = -6$，2　$0 < t < 4$より，$t = 2$

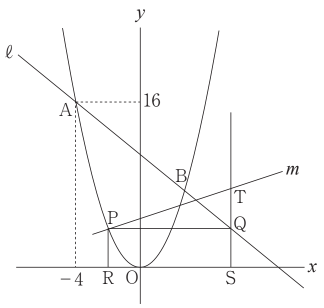
4　1. (a =) 1　2. − 1　3. ⑴ P (− 2，4)　⑵ $y = \frac{1}{2}x + 5$

≪解説≫

1. A (− 4，16)は，$y = ax^2$上の点だから，$16 = a \times (-4)^2$より，$a = 1$

2. $y = x^2$に，$x = 3$を代入して，$y = 3^2 = 9$だから，B (3，9)　よって，2点A，Bの座標より，直線ℓの傾きは，$\dfrac{9 - 16}{3 - (-4)} = \dfrac{-7}{7} = -1$

3. ⑴ 点P，Q，R，Sは右図のようになる。直線ℓの式を，$y = -x + b$とすると，A (− 4，16)を通ることから，$16 = -(-4) + b$より，$b = 12$　よって，直線ℓの式は，$y = -x + 12$　ここで，Pのx座標をtとすると，P (t，t^2)と表せ，2点P，Qのy座標は等しいから，Qのy座標もt^2。Qは，直線$y = -x + 12$上の点だから，$t^2 = -x + 12$より，Qのx座標は，$x = 12 - t^2$となり，Q ($12 - t^2$，t^2)



これより，$PQ = 12 - t^2 - t$，$PR = t^2$だから，$PQ + PR = 12 - t^2 - t + t^2 = 12 - t$　これが14であることより，$12 - t = 14$が成り立つから，$t = -2$　したがって，P (− 2，4)　⑵ P (− 2，4)，Q (8，4)，R (− 2，0)，S (8，0)となる。2点Q，Tのx座標は等しいから，T (8，h)とすると，PR = 4，RS = 8 −(− 2) = 10より，台形PRST = $\frac{1}{2}$(PR + ST) × RS = $\frac{1}{2}(4 + h) \times 10$　これが65cm^{2}であることより，$\frac{1}{2}(4 + h) \times 10 = 65$を解いて，$h = 9$だから，T (8，9)　直線$m$の式を，$y = cx + d$とすると，2点P，Tの座標から，$\begin{cases} 4 = -2c + d \\ 9 = 8c + d \end{cases}$が成り立つから，これを解いて，$c = \frac{1}{2}$，$d = 5$より，直線$m$の式は，$y = \frac{1}{2}x + 5$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

Step　3

5　1. (1) 1　(2) $\frac{3}{2}$　2. (1) (x 座標) $2t$　(y 座標) $\frac{1}{4}t^2$　(2) (t =) $\frac{4}{3}$

(3) ア. $2\sqrt{2}$　イ. $\frac{3}{2}$ (順不同)

≪解説≫

1. (1) 点Bの x 座標は2だから，$y = \frac{1}{4}x^2$ に $x = 2$ を代入して，$y = \frac{1}{4} \times 2^2 = 1$　つまり，点Bの y 座標は1。(2) $y = 2^2 = 4$ より，A (2, 4)　したがって，点Cの y 座標も4とわかるので，$y = \frac{1}{4}x^2$ に $y = 4$ を代入して，$4 = \frac{1}{4}x^2$ となり，$x^2 = 16$ より，$x = \pm 4$　点Cの x 座標は正だから，C (4, 4)　よって，直線BCの傾きは，$\frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2}$

2. (1) 点Aの x 座標を t とすると，A $(t,\ t^2)$，B$\left(t,\ \frac{1}{4}t^2\right)$ と表せる。また，点Cの y 座標は t^2 だから，$y = \frac{1}{4}x^2$ に，$y = t^2$ を代入して，$t^2 = \frac{1}{4}x^2$ より，$x^2 = 4t^2$　$x > 0$ なので，$x = 2t$ となり，C $(2t,\ t^2)$　よって，2点B，Cの座標より，点Dの座標は，$\left(2t,\ \frac{1}{4}t^2\right)$　(2) AB $= t^2 - \frac{1}{4}t^2 = \frac{3}{4}t^2$，BD $= 2t - t = t$ と表せる。長方形ABDCが正方形となるとき，AB = BD だから，$\frac{3}{4}t^2 = t$ が成り立つ。これを整理して，$t\left(\frac{3}{4}t - 1\right) = 0$ より，$t = 0,\ \frac{4}{3}$　よって，$t = \frac{4}{3}$　(3) 点(3, 2)を点Pとし，長方形ABDCの各線分上にあると仮定して，場合分けをする。(i) 点Pが線分AB上にあるとすると，$t = 3$ より，B$\left(3,\ \frac{9}{4}\right)$ となるが，$2 < \frac{9}{4}$ だから，点Pが点Bより下にあることになり矛盾する。(ii) 点Pが線分BD上にあるとすると，点Bの y 座標は2となり，$\frac{1}{4}t^2 = 2$ より，$t^2 = 8$　$t > 0$ だから，$t = 2\sqrt{2}$　よって，B $(2\sqrt{2},\ 2)$，D $(4\sqrt{2},\ 2)$ となり，$2\sqrt{2} < 3 < 4\sqrt{2}$ だから，点Pは線分BD上にある。(iii) 点Pが線分CD上にあるとすると，$2t = 3$ より，$t = \frac{3}{2}$　このとき，点Dの y 座標は点Bと等しく，点Bの y 座標は，$\frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$　また，点Cの y 座標は，$\frac{1}{4} \times 3^2 = \frac{9}{4}$ より，D$\left(3,\ \frac{9}{16}\right)$，C$\left(3,\ \frac{9}{4}\right)$ となり，$\frac{9}{16} < 2 < \frac{9}{4}$ だから，点Pは線分CD上にある。(iv) 点Pが線分AC上にあるとすると，$t^2 = 2$ より，$t = \sqrt{2}$　よって，C $(2\sqrt{2},\ 2)$ と

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

なるが，$3 > 2\sqrt{2}$ だから，点 P は点 C より右側にあることになり矛盾する。(i)～(iv)より，点(3，2)が長方形 ABDC の周上にあるのは，$t = 2\sqrt{2}$，$\dfrac{3}{2}$ のときである。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。